第２次導関数を用いて極値を判定する

・第２次導関数とは

・極値の判定Ｂ

このスライド内で [参考：数学が得意な人向け] というタグが付いているところがある場合，その箇所は中間テスト・期末テストには関係がありません．

第２次導関数とは

関数 $f(x)=x^3$ の導関数は，$f'(x)=3x^2$ である．

この $f'(x)$ の導関数，すなわち「$f(x)$ の導関数の導関数」

のことを，記号 $f''(x)$ で表す．

$$f''(x)=\{f'(x)\}'=(3x^2)'=6x$$

そして，$f''(x)=6x$ のことを，

$f(x)=x^3$ の第２次導関数とよぶ．

第２次導関数とは

一般に，関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数が存在するとき，

$f'(x)$ の導関数を元の関数 $y=f(x)$ の第２次導関数とよび，

次の記号を用いて表す．

$$f''(x)\left(=\{f'(x)\}'\right)$$

※ $f(x)$ を２回続けて微分してできる関数

$$y'',\quad f'',\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2f}{dx^2},\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}$$

関数 $y=f(x)$ が第２次導関数をもつとき，

$f(x)$ は２回微分可能であるという．

第２次導関数とは

例　$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$　のとき，

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

$g(x) = \log_e x$　のとき，

$$g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$g''(x) = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2}$$
$$= \frac{-1}{x^2}$$

極値の判定Ｂ

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

極大

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

極小

ここで，増減表の上２段の情報は，次の情報と同じだということに注意しよう．

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\Updownarrow$

$f'(a) = 0$ かつ

$f'(x)$ は $x = a$ を通過するときに減少傾向

$\Updownarrow$

$f'(a) = 0$ かつ

$f''(a) < 0$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\Updownarrow$

$f'(a) = 0$ かつ

$f'(x)$ は $x = a$ を通過するときに増加傾向

$\Updownarrow$

$f'(a) = 0$ かつ

$f''(a) > 0$

極値の判定 B ※ここまでの考察により，極値の判定 A の言い換えとして次の結果が得られる.

関数 $y=f(x)$ は２回微分可能とし，$f''(x)$ は連続関数であるとする.
このとき，次のような判定ができる.

(1) $f'(a)=0$ かつ $f''(a)<0$ $\Rightarrow$ $f(a)$ は極大値

$\Uparrow$

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$

極大

という判定条件の言い換え

(2) $f'(a)=0$ かつ $f''(a)>0$ $\Rightarrow$ $f(a)$ は極小値

$\Uparrow$

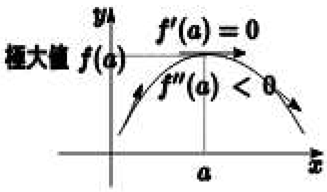
x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$

極小

という判定条件の言い換え

極値の判定 B 補足

(1)：極大値と判定できる場合



※ $f''(a)<0$ という情報は，

「接線の傾きが $x=a$ の時点で減少傾向にある」
$(f'(x))$ ことを伝えてくれる.

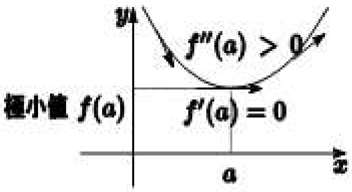
$f'(a)=0$ という情報と併せて考えると，

接線の傾きが，$(+)$ $\Rightarrow$ $f'(a)=0$ $\Rightarrow$ $(-)$ と

移り変わっていくことが分かるので，

$f(a)$ を極大値と判定できる.

(2)：極小値と判定できる場合



※ $f''(a)>0$ という情報は，

「接線の傾きが $x=a$ の時点で増加傾向にある」
$(f'(x))$ ことを伝えてくれる.

$f'(a)=0$ という情報と併せて考えると，

接線の傾きが，$(-)$ $\Rightarrow$ $f'(a)=0$ $\Rightarrow$ $(+)$ と

移り変わっていくことが分かるので，

$f(a)$ を極小値と判定できる.