

第2次導関数を用いて極値を判定する

- ・ 第2次導関数とは
- ・ 極値の判定B

このスライド内で 参考：数学が得意な人向け というタグが付いているところがある場合、その箇所は中間テスト・期末テストには関係がありません。

第2次導関数とは

関数 $f(x) = x^3$ の導関数は、 $f'(x) = 3x^2$ である。

この $f'(x)$ の導関数、すなわち「 $f(x)$ の導関数の導関数」のことを、記号 $f''(x)$ で表す。

$$f''(x) = \{f'(x)\}' = (3x^2)' = 6x$$

そして、 $f''(x) = 6x$ のことを、

$f(x) = x^3$ の第2次導関数とよぶ。

第2次導関数とは

一般に、関数 $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の導関数が存在するとき、 $f'(x)$ の導関数を元の関数 $y = f(x)$ の第2次導関数とよび、次の記号を用いて表す。

$$f''(x) \left(= \{f'(x)\}' \right)$$

※ $f(x)$ を2回続けて微分してできる関数

$$y'', \quad f'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

関数 $y = f(x)$ が第2次導関数をもつとき、

$f(x)$ は2回微分可能であるという。

第2次導関数とは

例 $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ のとき、

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x + 2$$

$g(x) = \log_e x$ のとき、

$$g'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$g''(x) = (x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} \\ = \frac{-1}{x^2}$$

極値の判定B

x	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

極大

x	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

極小

ここで、増減表の上2段の情報は、次の情報と同じだということに注意しよう。

x	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-

⇕

$f'(a) = 0$ かつ

$f'(x)$ は $x = a$ を通過するときに減少傾向

⇕

$f'(a) = 0$ かつ

$f''(a) < 0$

x	...	a	...
$f'(x)$	-	0	+

⇕

$f'(a) = 0$ かつ

$f'(x)$ は $x = a$ を通過するときに増加傾向

⇕

$f'(a) = 0$ かつ

$f''(a) > 0$

極値の判定 B ※ここまでの考察により、極値の判定 A の言い換えとして次の結果が得られる。

関数 $y = f(x)$ は 2 回微分可能とし、 $f''(x)$ は連続関数であるとする。
このとき、次のような判定ができる。

(1) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) < 0 \Rightarrow f(a)$ は極大値

↑	x	...	a	...	↑	という判定条件の 言い換え
	$f'(x)$	+	0	-		
	$f(x)$	↗	$f(a)$	↘		

極大

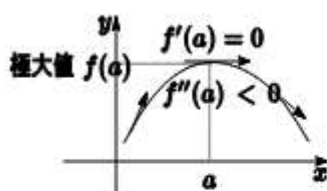
(2) $f'(a) = 0$ かつ $f''(a) > 0 \Rightarrow f(a)$ は極小値

↑	x	...	a	...	↑	という判定条件の 言い換え
	$f'(x)$	-	0	+		
	$f(x)$	↘	$f(a)$	↗		

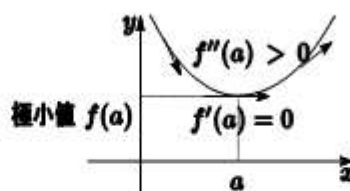
極小

極値の判定 B 補足

(1): 極大値と判定できる場合



(2): 極小値と判定できる場合



※ $f''(a) < 0$ という情報は、

※ $f''(a) > 0$ という情報は、

「接線の傾きが $x = a$ の時点で減少傾向にある」接線の傾きが $x = a$ の時点で増加傾向にある」
($f'(x)$) ことを伝えてくれる。 ($f'(x)$) ことを伝えてくれる。

$f'(a) = 0$ という情報と併せて考えると、 $f'(a) = 0$ という情報と併せて考えると、

接線の傾きが、 $(+) \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow (-)$ と 接線の傾きが、 $(-) \Rightarrow f'(a) = 0 \Rightarrow (+)$ と
移り変わっていくことが分かるので、 移り変わっていくことが分かるので、

$f(a)$ を極大値と判定できる。

$f(a)$ を極小値と判定できる。